Année 1962 N° d'ordre : 173

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Mention Sciences

par

Boucour HESKIA

1re Thèse :

ETUDE des FILES d'ATTENTE dans une STATION à r POSTES

APPLICATION à la RECHERCHE du NOMBRE OPTIMAL de POSTES à CRÉER sous l'HYPOTHÈSE de CONSTANCE du TAUX d'INTÉRÊT

2ème THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES par la FACULTÉ

Soutenues le 14 Juin 1962 devant la Commission d'Examen :

Jury : MM. H. EYRAUD — Président
R. MALECOT, R. FERON — Examinateurs

UNIVERSITE DE LYON -- FACULTE DES SCIENCES

DOYENS HONORAIRES

MM. LONGCHAMBON, DOUIN, MOUSSA

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. LOCQUIN, de LARAMBERGUE, DOEUVRE, SOLLAUD, MENTZER, MOUSSA

DOYEN

M. GAUTHIER H.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

ASSESSEUR

M. BRACONNIER

PROFESSEURS

MM. LONGCHAMBON	Minéralogie
DEJARDIN	Physique générale
DOUIN	Botanique
EYRAUD H.	Calcul différentiel et Intégral
COURTY	Chimie-Physique
PRETTRE	Chimie Industrielle
KUHNER	Microbiologie et Mycologie
MALECOT	Mécanique rationnelle et appliquée
PARIS	Chimie Minérale
AUMERAS	Chimie
COLONGE	Chimie Organique
FLANDRIN	Géologie Appliquée
JANIN	Physique Expérimentale
BERNARD	Physique industrielle
DUFAY J.	Astronomie
NIGON	Zoologie Expérimentale
GAUTHIER H.	Géologie
VIRET	Géologie
WAUTIER	Zoologie
CHOPIN	Chimie Biologique

CUEILLERON	Chimie
BRACONNIER	Méthodes Mathématiques de la Physique
EYRAUD Ch.	Chimie Physique Appliquée
SARAZIN	Physique Nucléaire
PERES	Physiologie
MESNARD	Electronique
GRANDMONTAGNE	Physique
BOIDIN	Botanique
BOUTILLIER	Minéralogie
LAFOUCRIERE	Physique nucléaire
DREUX	Chimie organique

Professeurs sans chaire

MM. TEICHNER	Chimie Industrielle
GAUME	Physique
MERLIN	Chimie Minérale
PAVANS de CECCATTY	Zoologie
PHILBERT	Physique Nucléaire
COHEN-ADAD	Chimie

Maîtres de Conférences

MM. DEPRAZ	Physique Nucléaire
FERON	Mathématiques
BERSILLON	Physiologie Végétale S.P.C.N.
DAVID L.	Géologie
GAUTHIER J.	Chimie
LAFORGUE	Physique
LEGAY	Zoologie Expérimentale S.P.C.N.
USAN	Physique S.P.C.N.
CHENEVOY	Géologie Appliquée
Melle MAITROT	Physique
CHANEL	Psychophysiologie
ASCH	Physique
DUFAY M.	Physique
GINET	Zoologie
MAURY	Mathématiques
MICHEL	Minéralogie
Mme ERICSON	Physique générale
GEVIN	Géologie
PONASSE	Mathématiques
MARTEL	Mécanique
CHERY	Physique
LEFEBVRE	Mathématiques
D'INCAN	Physique
PERNET	Mathématiques
Melle GAUTHERON	Chimie-Biologie
BERGEON	Physique
MATHIEU	Mécanique des fluides (Ecole Centrale)
LUBET	Physiologie

Maîtres de Conférences adjoints

MM. PIERRON	Chimie
LEMONDE	Physique

Secrétaire Principal Honoraire

M. ROUX

Secrétaire Principal

M. BURNET

A M E S P R O F E S S E U R S

A L A

F A C U L T E D E L Y O N

MM. MALECOT
FERON
REYNIER

en hommage respectueux
et reconnaissant

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550012_0014

A MA FEMME

A MES PARENTS

A TOUTE MA FAMILLE

AVANT-PROPOS

Le présent travail a été effectué en 1961 et 1962 à l'Institut des Sciences Financières et d'Assurances de LYON.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur H. EYRAUD d'avoir bien voulu présider notre jury.

Nous présentons à Monsieur R. FERON, Maître de Conférences, l'expression de notre vive gratitude pour la bienveillante attention qu'il nous a témoignée.

Nous remercions Monsieur le Professeur MALECOT d'avoir bien vlulu accepter de faire partie de notre jury.

ETUDE DES FILES D'ATTENTE DANS UNE STATION

A r POSTES

Application à la recherche du nombre optimal
de postes à créer sous l'hypothèse de constance
du taux d'intérêt.

F I L E S d' A T T E N T E

I - INTRODUCTION MATHEMATIQUE

1/ Définition du Processus aléatoire: processus ponctuel de Poisson.

2/ Etude de l'intervalle de temps séparant 2, 3...(n+1) évènements successifs. Lois de γ

3/ Loi de probabilité de la "durée de survie" v d'un intervalle de temps.

4/ Loi de probabilité du nombre d'évènements se produisant dans un ensemble d'intervalles donnés.

5/ Description du Processus de Poisson.

6/ Régime permanent.

II - ETUDE DES FILES D'ATTENTE EN REGIME PERMANENT

arrivées en Processus de Poisson, durée de service exponentielle:

r postes

1/ Loi du nombre de mobiles en attente

2/ Lois de la durée d'attente:

a) Temps perdu par les postes

b) Temps perdu par les mobiles.

3/ Exemple.

Recherche du nombre optimal de postes

I - Cas d'une installation à créer

II - Cas de réfection d'une installation existante.

PROBLEME DES FILES D'ATTENTE

Etude en régime permanent

Arrivées Poissoniennes: Durée de service exponentielle

Les files d'attente, ou queues, sont des phénomènes que l'on observe fréquemment dans la vie courante.

On les rencontre aussi dans de nombreux problèmes économiques, sociaux, militaires, etc...

Un phénomène d'attente peut être décrit de la façon suivante:

- Arrivées de mobiles à des intervalles de temps réguliers ou irréguliers en un point appelé centre de service.

- A ce centre de service sont rassemblés des postes de service ou stations.

- Les mobiles doivent attendre éventuellement qu'un poste soit libre pour être servis.

- Les mobiles sont pris en charge par les postes un à un dans leur ordre d'arrivée.

Prenons comme exemple les voyageurs qui font enregistrer leurs bagages pour un départ à l'aérodrome.

Les voyageurs arrivent à des intervalles de temps aléatoires à l'aérodrome. Il y a plusieurs guichets où les voyageurs peuvent faire enregistrer leurs bagages. Il y aura attente si tous les postes sont occupés, et les voyageurs seront pris en charge suivant leur ordre d'arrivée.

D'autres exemples seraient les suivants:

- Arrivées de clients dans un magasin. Ils sont pris en charge par les vendeurs dans l'ordre de leur arrivée.

- Machines à réparer dans un atelier. Elles sont prises en charge au fur et à mesure de leur arrivée par les mécaniciens.

INTRODUCTION MATHEMATIQUE

I - Définition du processus aléatoire.

On entend par processus l'évolution dans le temps d'un système où le hasard intervient continuellement (ou au moins sur une suite indéfinie d'instants).

En général toute étude portant sur l'évolution à caractère aléatoire d'un phénomène relève des processus aléatoires.

Reportons nous à l'exemple pris ci-dessus: les voyageurs enregistrant leurs bagages.

Le système est ici constitué par l'ensemble des guichets qui prennent en charge les voyageurs (mobiles). Le système peut être caractérisé par le nombre de voyageurs présents dans le système (état du système). Autrement dit, à un instant donné, l'état du système peut être caractérisé par le nombre de mobiles présents.

Le système peut passer d'un état E_i (à l'instant t_i) à un autre état E_j (à l'instant t_j). On dit qu'il y a changement d'état. Donc, le changement d'état correspondrait à un changement du nombre de mobiles présents (en moins ou en plus). Evènements = changement d'état. En définitive, le hasard intervient de deux manières dans un processus aléatoire:

a) Les changements d'état se font à des temps aléatoires, $t_1 \ldots . t_n$

b) A l'un de ces instants on passe d'un état E_i aléatoire à un autre état E_j, lui-même aléatoire.

a) considéré seul constitue un processus ponctuel.

Le plus simple et le plus important des processus ponctuels est le processus de Poisson , qui fera l'objet de l'étude ci-après.

II - Etude de l'intervalle de temps séparant 2, 3,...(n + 1) évènements successifs. Loi de γ

Hypothèses générales :

- Les évènements sont indépendants les uns des autres, et indépendants du temps, c'est-à-dire que la probabilité pour qu'un évènement se produise ou non dans (t, t+ dt) ne dépend ni des évènements qui se sont passés avant l'instant t, ni des évènements qui se passeront après t + dt, mais dépend uniquement de dt.

- La probabilité qu'un évènement se produise dans un petit intervalle Δt est proportionnelle à Δt, soit $c\ \Delta t \quad c \in \mathbb{R}^+$

- La probabilité qu'un évènement se présente plus d'une fois dans t est négligeable par rapport à Δt : on note $0(\Delta t)$.

a) Etude de l'intervalle de temps séparant deux évènements successifs

soit l'intervalle $[t , t+h]$

X arrivée d'un évènement

soit $\bar{X}$ non arrivée de l'évènement

$P\left\{\bar{X} \in [t, t+h]\right\}$ ne dépend d'après les hypothèses faites que de h. On note :

$$P\left\{\bar{X} \in [t, t+h]\right\} = g(h)$$

On aurait de même

$$P\left\{\bar{X} \in [t, t+h+k]\right\} = g(h+k)$$

$P\left\{\bar{X} \in [t, t+h+k]\right\}$ est la probabilité pour que n'arrive pas l'évènement X dans l'intervalle de temps $[t, t+h+k]$. Or, pour qu'il n'arrive rien dans $[t, t+h+k]$ il faut qu'il ne soit rien arrivé dans $[t, t+h]$ et dans $[t+h, t+h+k]$.

Donc:

$$P\left\{\bar{X} \in [t, t+h+k]\right\} = g(h+k)$$

$$= P\left\{\bar{X} \in [t, t+h]\right\} \times P\left\{\bar{X} \in [t+h, t+h+k]\right\} = g(h)\ g(k)$$

$$g(h+k) = g(h)\ g(k) \qquad (1)$$

Posons $h = t \quad K = \Delta t$ Alors on a:

$$g(t+\Delta t) = g(t)\ g(\Delta t) \qquad (2)$$

D'après les hypothèses générales:

$$g(\Delta t) = 1 - c(\Delta t) - 0(\Delta t) \qquad (3)$$

Portons (3) dans (2) :

$$g(t + \Delta t) = g(t)\left[1 - c\,\Delta t - 0(\Delta t)\right]$$

$$g\,\frac{(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \longrightarrow -c\,g(t)$$

Quand $\Delta t \longrightarrow 0$ On a :

$$g'(t) = -c\,g(t)$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = -c$$

$$\text{Log } g(t) = -c\,t + \text{Log}(\lambda)$$

$$g(t) = \lambda e^{-ct}$$

$$g(0) = \lambda$$

$g(0)$ est par définition la probabilité pour qu'aucun évènement n'arrive pendant une période de durée 0.

On peut interpréter $g(0)$ ainsi: c'est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de mobile présent, à l'intant $t = 0$, à l'ouverture des postes de service.

On voit que $g(0) = 1$, d'où

$$g(t) = e^{-ct}$$

Soit maintenant t_i et t_{i+1} les instants où se produisent 2 évènements successifs E_i , E_{i+1}

Dire que $(t_{i+1} - t_i) < t$, c'est dire que pendant la durée t il s'est produit au moins un évènement.

$$P\left\{t_{i+1} - t_i < t\right\} = 1 - e^{-ct}$$

Ceci est par définition la fonction de répartition des durées $t = t_{i+1} - t_i$ séparant deux évènements consécutifs.

$$F(t) = 1 - e^{-ct} \begin{cases} F(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ F(t) = 1 - e^{-ct} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

La probabilité élémentaire sera

$$dF(t) = f(t)\,dt = c\,e^{-ct}\,dt = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ ce^{-ct}\,dt \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

On appelle cette loi, loi de γ_1 non réduite

$$E\{t\} = \int_0^{\infty} t\,ce^{-ct}\,dt = \frac{1}{c}$$

$\frac{1}{c}$ est la période moyenne des évènements. La fréquence moyenne, ou densité, sera c sur un intervalle de temps unitaire.

Posons $u = ct$. On obtient :

$f_1(u)\,du = e^{-u}\,du$ On a une loi de γ_1 réduite.

La fonction de répartition correspondante est

$$F_1(u) = \int_0^{u} e^{-t}\,dt = 1 - e^{-u}$$

b) <u>Etude de l'intervalle de temps séparant plusieurs évènements successifs.</u>

Soient maintenant 2 intervalles de temps successifs : $(t_{i+1} - t_i)$, $(t_{i+2} - t_{i+1})$ et soient t_i , t_{i+1}, t_{i+2} les instants aléctoires où se produisent dans l'ordre les évènements E_i, E_{i+1}, E_{i+2}

Cherchons la loi réduite de l'intervalle de temps séparant E_i de E_{i+2}

Posons $x = c\,(t_{i+1} - t_i)$

$y = c\,(t_{i+2} - t_{i+1})$

$z = x + y = c\,(t_{i+2} - t_i)$

Par hypothèse, x et y sont indépendants et suivent individuellement une loi du type γ_1

Nous cherchons la loi de $z = x + y$

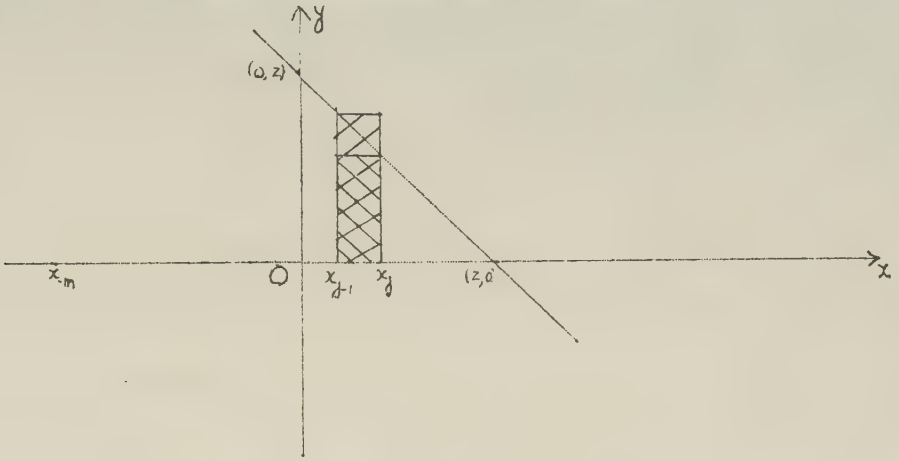
soit $H(z)$ la fonction de répartition de z

$$Z = X + Y$$

Nous voulons trouver :

$$H(z) = P\left\{(X + Y) < z\right\}$$

On peut considérer $H(z)$ comme la probabilité pour que le point aléatoire $M(x, y)$ soit situé au-dessous de la droite $x + y = z$



soit $x_{-m}, x_{-m+1}, \ldots x_0, x_1, \ldots x_{j-1}, x_j, \ldots x_n, \ldots$ une suite de nombres croissant de $-\infty$ à $+\infty$, et dont les intervalles sont tous inférieurs à $\delta > 0$.

La région $x + y < z$ comprend une certaine région $\underline{r}$; elle est comprise dans une certaine région R. r et R sont définies ainsi :

$\underline{r}$ est l'ensemble des régions r_j définies par

$$x_{j-1} \leqslant x < x_j \qquad y < z - x_j$$

$\underline{R}$ est l'ensemble des régions R_i définies par

$$x_{i-1} \leqslant x < x_i \qquad y < z - x_{i-1}$$

X et Y sont indépendants par hypothèse.
La probabilité que M (X, Y) soit dans r_j est

$$\left[F(x_j) - F(x_{j-1}) \right] \quad G(z - x_j)$$

La probabilité que M (X, Y) soit dans R_j est

$$\left[F(x_i) - F(x_{i-1}) \right] G(z - x_{i-1})$$

où F et G sont les fonctions de probabilité totale de X et Y

Les régions x_j sont sans point commun (car on a $x_{j-1} \leq x < x_j$) de même que les régions R_j . On peut leur appliquer le théorème des probabilités totales.

Posons : $$l = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} G(z - x_j) \quad \left[F(x_j) - F(x_{j-1}) \right]$$

$$L = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} G(z - x_{j-1}) \quad \left[F(x_j) - F(x_{j-1}) \right]$$

On a :

$$l < H(z) < L$$

Quand $\delta \to 0$, l'intégrale de Stieltjès $\int_{-\infty}^{+\infty} G(z-x)\, dF(x)$ peut se définir comme la limite commune de l et L . On aura :

$$H(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(z - x)\, dF(x)$$

Dans notre cas, on a $x \geqslant 0$, donc

$$H(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(z - x)\, dF(x) \quad \begin{cases} = 0 \text{ si } x < 0 \\ = \int_0^{+\infty} G(z-x)\, dF(x) \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On notera

$$H(z) = \int_0^{+\infty} G(z - x)\, dF(x)$$

On a ainsi la fonction de répartition de Z

$$P\left\{ Z < z \right\} = \int_0^{z} G(z - x)\, dF(x)$$

Nous avons dans notre cas:

$$G\ (z - x) = 1 - e^{-(z-x)}$$

$$F\ (x) = 1 - e^{-x}$$

$$dF(x) = e^{-x}\ dx$$

$$P\left\{ Z < z \right\} = \int_0^z (1 - e^{-(z-x)})\ e^{-x}\ dx$$

$$= \int_0^z e^{-x}\ dx - \int_0^z e^{-(z-x)} e^{-x}\ dx$$

$$= \left[e^{-x} \right]_z^0 - e^{-z} \left[x \right]_0^z = 1 - e^{-z}\ (1+z)$$

d'où :

$$H\ (z) = P\ \left\{ Z < z \right\} = 1 - e^{-z}\ \ (1 + z)$$

La probabilité élémentaire sera (en remplaçant z par u) :

$$f_2\ (u)\ du = u\ e^{-u}\ du$$

$u = x + y$ suit une loi du type γ_2

On a vu que :

- L'intervalle de temps séparant 2 évènements successifs suit une loi de γ_1 d'expression élémentaire

$$f_1\ (u)\ du = e^{-u}\ du$$

et de fonction de répartition :

$$F_1\ (u) = 1 - e^{-u}$$

- L'intervalle de temps séparant 3 évènements successifs suit une loi de γ_2

d'expression élémentaire : $f_2\ (u)\ du = u\ e^{-u}\ du$

et de fonction de répartition : $F_2\ (u)\ du = 1 - e^{-u}\ (1 + u)$

On voit apparaître une formule de récurrence.

Hypothèse

L'intervalle de temps séparant (n+1) évènements successifs suit une loi de γ_n d'expression élémentaire

$$f_n(u)\,du = e^{-u}\,\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,du$$

et de fonction de répartition

$$F_n(u) = 1 - e^{-u}\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

On va montrer que l'hypothèse de récurrence est vraie pour l'intervalle de temps séparant (n+2) évènements successifs.

Soit :
$$x_1 = c\,(t_{i+1} - t_i)$$
$$x_2 = c\,(t_{i+2} - t_{i+1})$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = c\,(t_{i+n+1} - t_{i+n})$$
$$x_{n+2} = \theta = c\,(t_{i+n+2} - t_{i+n+1})$$

Posons :

$$U = \sum_{k=1}^{n+1} x_k + \theta = c\,(t_{i+n+2} - t_i)$$

donc :

$$U = Y + \theta$$

On a :

$$P\left\{U < u\right\} = \int_0^u G\,(u-\theta)\,dF(\theta)$$

Y suit par hypothèse une loi de γ_n

θ suit par hypothèse une loi de γ_1

Les (n+2) évènements sont indépendants, donc

$$dF(\theta) = e^{-\theta}\,d\theta$$

On a : $u - \theta = y \quad G(u-\theta) = G(y)$

donc $(u-\theta)$ suit une loi de γ_n comme y

$G(y) = 1 - e^{-y}\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \dots + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\right)$ remplaçons Y par $(u-\theta)$

$$G(u-\theta) = 1 - e^{-(u-\theta)}\left[1 + (u-\theta) + \frac{(u-\theta)^2}{2!} + \dots + \frac{(u-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

$$P\left\{U<u\right\} = \int_0^u \left\{1 - e^{-(u-\theta)}\left[1 + (u-\theta) + \frac{(u-\theta)^2}{2!} \dots \frac{(u-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\right\} e^{-\theta}\, d\theta$$

$$P\left\{U<u\right\} = \int_0^u \left[e^{-\theta} - e^{-u}\left[1 + (u-\theta) + \frac{(u-\theta)^2}{2!} + \dots + \frac{(u-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\right]\right] d\theta$$

$$= \int_0^u e^{-\theta}\, d\theta - e^{-u}\int_0^u \left[1 + (u-\theta) + \dots + \frac{(u-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\right] d\theta \dots$$

$$= \left[-e^{-\theta}\right]_0^u - e^{-u}\left[\theta + u\theta - \frac{\theta^2}{2} \dots + \frac{1}{(n-1)!}(-1)\frac{(u-\theta)^n}{n}\right]_0^u$$

$$= 1 - e^{-u} - e^{-u}\left[\theta + u\theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{(u-\theta)^3}{3!} - \dots - \frac{(u-\theta)^n}{n!}\right]_0^u$$

$$F_{n+1}(u) = 1 - e^{-u} - ue^{-u} - u^2 e^{-u} + \frac{u^2}{2} e^{-u} + 0 + \dots - e^{-u}\left(\frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!}\right)$$

$$= 1 - e^{-u} - u e^{-u} - \frac{u^2}{2} e^{-u} - e^{-u}\left(\frac{u^3}{3!} + \dots \frac{u^n}{n!}\right)$$

$$F_{n+1}(u) = 1 - e^{-u}\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!}\right)$$

d'où

$$f_{n+1}(u)\, du = e^{-u}\left(1 + U + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!}\right) - e^{-u}\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right) du$$

$$= e^{-u}\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} - 1 - u - \frac{u^2}{2!} - \dots - \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right) du$$

$$f_{n+1}(u)\, du = e^{-u}\, \frac{u^n}{n!}\, du$$

III - Loi de probabilité de "la durée de survie" d'un intervalle.

Soit un intervalle de temps $(t_i ; t_{i+1})$

On a : $t_{i+1} - t_i = t$

à l'instant t_i le système est à l'état E_i

" " t_{i+1} le système est à l'état E_{i+1}

Cet intervalle a pour loi

$$f(t) = e^{-ct}\, c\, dt \quad \text{comme on l'a vu}$$

L'évènement E_i s'est produit à l'instant t_i , E_{i+1} se produira à t_{i+1} . Plaçons nous à l'instant $t_i + \theta$

A l'instant $t_i+\theta$ il s'est écoulé θ depuis t_i : l'évènement E_{i+1} se produira au bout d'un intervalle de temps v

v s'appelle la "surée de survie" de l'intervalle de temps (t_i , t_{i+1}) au delà de θ déjà atteint.

Cherchons la loi élémentaire de v liée (ou conditionnée) par θ

On a:

$$\theta + v = t_{i+1} - t_i = t$$

On peut écrire:

$$P\left\{ v < V < v + dv \,\middle|\, \theta < t \right\} \times P\left\{ \theta < t \right\} = P\left\{ v < V < v+dv \text{ et } \theta < t \right\}$$

$$P\left\{ \theta < t \right\} = P\left\{ t > \theta \right\} = \int_{\theta}^{+\infty} e^{-ct}\, c\, dt = \left[-e^{-ct} \right]_{\theta}^{+\infty} = e^{-c\theta}$$

$$P\left\{ v < V < v+dv \text{ et } \theta < t \right\} = e^{-c\,(\theta+v)}\, c\, dv$$

d'où

$$f_\theta(v)\, dv = \frac{e^{-c\,(\theta+v)}\, c\, dv}{e^{-c\theta}}$$

$$f_\theta(v)\,dv = e^{-cv}\,cdv$$

v suit dont la même loi que t, c'est-à-dire que les probabilités de "durée de survie" au-delà d'une durée θ (sachant que θ est atteint) sont indépendantes de θ .

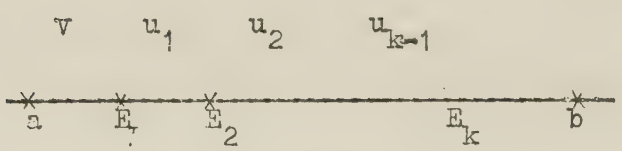
IV - Loi de probabilité du nombre d'évènements se produisant dans un ensemble d'intervalles donnés.

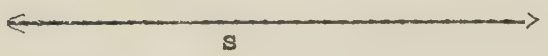
Soit un intervalle de temps (a, b) de durée T : cherchons la loi de probabilité du nombre d'évènements pouvant se produire dans cet intervalle.

Soit P_k la probabilité d'avoir k évènements exactement sur (a, b)

Π_k " " " " au moins " "

$$\Pi_k = P_k + P_{k+1} + P_{k+2} + \cdots + P_{k+n} + \cdots$$





Soient les évènements E_1 ; E_2 , $\cdots E_k$

$$\Pi_k = P\left\{ k \text{ évènements au moins sur } (a,b) \right\} = P\left\{ (a,E_k) \leq ab \right\}$$

$$\text{On a } = (a, E_k) = v + u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1} = S$$

v est la durée de survie du premier intervalle. On a vu qu'elle suivait aussi une loi de γ , la même que celle des u. On a ici k intervalles indépendants: la somme de ces k intervalles obéit à une loi de γ_k .

$$f_k(s)\,ds = e^{-cs}\,\frac{(cs)^{k-1}}{(k-1)!}\,cds \quad \text{(comme on l'a vu)}$$

$$\Pi_k = P\left\{ s \leq T \right\} = \int_0^T f_k(s)\, ds = \int_0^T e^{-cs} \frac{(cs)^{k-1}}{(k-1)!}\, c\, ds$$

Posons $cs = u$. On aura alors

$$\Pi_k = P\left\{ S \leq T \right\} = P\left\{ u \leq cT \right\} = \int_0^{cT} e^{-u} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\, du$$

$$P_k = \Pi_k - \Pi_{k-1} = P\left\{ K \text{ évènements au moins} \right\} - P\left\{ (k+1) \text{ évènements au moins} \right\}$$

$$P_k = \int_0^{CT} \left[d^{-u} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} - e^{-u} \frac{u^k}{k!} \right] du$$

Intégrons par parties $\int_0^{CT} e^{-u} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!}\, du$

$$dx = u^{k-1}\, du \qquad v = e^{-u}$$

$$x = \frac{u^k}{k} \qquad dv = e^{-u}\, du$$

$$P_K = \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{u^k}{k} e^{-u} \right]_0^{cT} + \int_0^{cT} \frac{e^{-u} u^k}{k!}\, du - \int_0^{cT} e^{-u} \frac{u^k}{k!}\, du$$

$$P_k = \frac{1}{(k-1)!} \frac{(CT)^k}{k} e^{-CT}$$

$$P_k = e^{-CT} \frac{(CT)^k}{k!}$$

C'est la loi de Poisson de l'entier $K \geqslant 0$

$$P\left\{ K = k \right\} = e^{-CT} \frac{(CT)^k}{k!}$$

$$E\left\{ K \right\} = \sum_0^\infty k\, P_k = \sum_0^\infty k\, e^{-CT} \frac{(CT)^k}{K!}$$

$$= CT\, e^{-CT} \frac{(CT)^k}{k!} = CT\, e^{-CT}\, e^{CT}$$

$$E\left\{ K \right\} = CT$$

Le nombre moyen d'évènements se produisant sur une durée T est donc CT, c'est-à-dire que la densité ou la fréquence moyenne des évènements est C.

V - Description du Processus de Poisson

Ainsi donc, d'après ce que l'on a vu, on peut décrire le Processus de Poisson de deux manières:

- Une succession d'intervalles aléatoires (t) indépendants, qui suivent tous une loi de γ_1, d'expression élémentaire:

$$f(t)\,dt = e^{-ct}\,c\,dt$$

- Dans un intervalle de temps de durée T (ou un ensemble d'intervalles de même durée) le nombre k d'évènements qui s'y produisent suit une loi de Poisson de paramètre CT.

$$P\left\{ N = k \right\} = e^{-cT}\,\frac{(CT)^k}{k!}$$

VI - Etude du régime permanent

Un système peut être défini par l'état dans lequel il se trouve. On peut désigner les états par $[0]$ $[1]$, ... $[k]$

Ces états désignent le nombre de mobiles présents. On supposera que ces états sont en nombre fini ou infinité dénombrable. L'évolution du système sera caractérisée par les instants où le système change d'état, et par la suite des états que peut prendre le système.

Pour connaître la loi d'évolution du système, il est commode, lorsqu'on le peut, de déterminer les "probabilités du passage d'états" c'est-à-dire la loi de probabilité des états possibles à l'instant t + h, connaissant l'état à l'instant t.

Soit $\prod_{i,t}^{j,\,t+h}$ la probabilité pour le système d'être à l'état $[j]$ à l'instant (t+h) , sachant qu'il est à l'état $[i]$ à l'instant t

Soit $A_{i,t}$ la probabilité a priori pour le système d'être à l'état $[i]$ à l'instant t.

On aura:

$$A_{i,t+h} = A_{1,t} \prod^{i,t+h}_{1,t} + A_{2,t} \prod^{i,t+h}_{2,t} + \dots + A_{n,t} \prod^{i,t+h}_{n,t} + \dots$$

Probabilité d'être à l'état [1] à l'instant t

Probabilité de passer à l'état [i] à l'instant t+h, sachant qu'il est à l'état [1] à l'instant t

$$A_{i,t+h} = \sum_j \prod^{i,t+h}_{j,t} A_{j,t}$$

Si les $\prod_{j,t}^{i,t+h}$ sont indépendants de t (on note $\prod_j^i$) on dit que le système est homogène dans le temps.

Il est possible que le système évolue de telle façon que les $A_{i,t}$ soient indépendants du temps. Le processus est alors stationnaire. On dit que le système est en régime permanent.

On a alors:

$$A_i = \sum_j A_j \prod^i_j$$

Les A_i seront alors la probabilité a priori pour le système d'être à l'état [i] à une époque t quelconque.

ETUDE DES FILES D'ATTENTE EN REGIME PERMANENT

Arrivées Poissonniennes, durée de service exporientielle:

r postes

I - Loi du nombre de mobiles en attente

Hypothèses générales :

- Les arrivées forment un processus de Poisson de densité a c'est-à-dire que pendant la durée T il y aura un nombre moyen d'arrivées aT. D'où :

Probabilité d'une arrivée dans $\left[t, t + dt\right] = a\,dt$

- Les durées de service u (c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre le moment où le client est pris en charge par un poste de service et le moment où il s'en va) suivent une loi γ_1 d'expression élémentaire:

$$f(u)\,du = e^{-su}\,s\,du$$

D'où la fonction de répartition des durées de service.

$$F(u) = P\left\{U < u\right\} = \int_0^u f(x)\,dx = \int_0^u e^{-sx}\,s\,dx$$

$$= -\int_0^u e^{-sx}\,d(-sx) = \left[-e^{-sx}\right]_0^u$$

$$F(u) = 1 - e^{-su}$$

$$E\left\{u\right\} = \int_0^\infty u\,e^{-su}\,s\,du = \text{Période moyenne de durée de séjour à un poste.}$$

Posons : $su = x$

$$E\left\{u\right\} = \frac{1}{S}\int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx = \frac{1}{S}\,\Gamma(2) = \frac{1}{S}$$

Donc; durée moyenne d'un service : $\frac{1}{S}$

La densité ou fréquence moyenne sera S par poste.

On voit que la probabilité d'un départ dans (t, t+dt) lorsque les r postes de service sont occupés est : r s dt

Finalement, dans un intervalle (t, t + dt) on a pour les r postes:

Probabilité d'une arrivée; a d t

Probabilité d'un départ: r s d t

Nous supposerons en outre que :

- Les durées de service sont indépendantes entre elles et indépendantes des mobiles.
- Les arrivées sont indépendantes les unes des autres.
- Les mobiles sont servis dans l'ordre de leur arrivée.

Dans ces conditions, on montre qu'un régime permanent tend à s'établir.

On se place à un moment où le système a atteint un régime permanent, c'est-à-dire que la probabilité pour le système d'être à l'état $[k]$ à l'instant t comme à l'instant $t + dt$ est indépendante du temps.

On désignera par A_k la probabilité à priori pour le système d'être à l'état $[k]$

Pendant la durée T il y aura en moyenne aT arrivées

la durée moyenne d'un service est $\frac{1}{S}$

r postes de service

La durée moyenne d'occupation par poste pendant T sera:

$$aT \times \frac{1}{S} \times \frac{1}{r} = \frac{a}{S} \frac{T}{r}$$

Posons $c = \frac{a}{S}$

La durée moyenne d'occupation par poste sera alors : $\frac{c}{r} T$

$\frac{c}{r}$ est le "coefficient d'emploi" du service. Plusieurs cas sont possibles

(1) $\frac{c}{r} > 1 \Rightarrow c > r \qquad \frac{a}{s} > r \qquad$ d'où $a > r\,s$

Pendant une durée T on aura $aT > r\,S\,T$, ce qui veut dire que le nombre moyen d'arrivées est supérieur au nombre moyen de départs, donc que le service accumule un retard qu'il ne pourra pas rattraper.

(2) $\frac{c}{r} < 1 \qquad aT < r\,s\,T$

Le nombre moyen d'arrivées est inférieur au nombre moyen de départs. On démontre que pour $\frac{c}{r} < 1$, le système évolue vers un état permanent.

(3) $\frac{c}{r} = 1 \qquad aT = r\,s\,T$

Le nombre moyen d'arrivées est égal au nombre moyen de départs.

<u>On se placera dans le cas $\frac{c}{r} < 1$</u>

On ne s'occupera que des états immédiatement voisins.

Soit A_k la probabilité à priori pour le système de se trouver dans l'état $[k]$. Dans le cas de r postes :

$k \leqslant r \Rightarrow k$ mobiles sont servis : il n'y a pas d'attente

$k > r$ il y aura attente

$A_o = P[o]$ = probabilité pour que tous les postes soient libres.

Pour que les r postes restent libres dans $t, t+dt$ (c'est-à-dire conservation de l'état $[o]$) il faut qu'il n'y ait pas d'arrivées.

$P\{[0]$ à l'instant $t\} = Ao$ car on est en

$P\{[0]$ à l'instant $t + dt\} = Ao$ régime permanent

$P\{[0]$ dans $[t, t + dt]\} =$

$P\{[o]$ à l'instant $t\}$ x $P\{$ pas d'arrivée dans $[t, t+dt]\}$

$= Ao \times (1 - a\,d\,t)$

$$P\{[0] \text{ dans } [t,t + dt]\} = A_o\,(1 - a\,d\,t)$$

$P\{[0] \to [1]$ dans $[t, t +dt]\} = P\{[0]\} \times P\{$une arrivée dans $[t,t +dt]\}$

$$P\{[0] \to [1] \text{ dans } [t, t+dt]\} = A_o\,a\,d\,t$$

On a convenu de n'étudier que les états immédiatement voisins.

En effet : $P\left\{[0]\to[2] \quad \text{dans } [t, t+dt]\right\} = A_0 (a\,d\,t)^2$ est négligeable.

$P\left\{[1]\to(0) \text{ dans } [t, t+dt]\right\} = P\,[1] \times P\{\text{un départ dans } [t,t+dt]\} = A_1\ s\,d\,t$

$$P\left\{[1]\to(0) \quad \text{dans } [t,t+dt]\right\} = A_1\ s\,d\,t$$

de façon générale pour $K < r$

$$P\left\{[k-1]\to(k) \quad \text{dans } [t,t+dt]\right\} = A_{k-1}\ a\,dt \quad \text{(une arrivée)}$$

$$P\left\{[k]\longrightarrow(k-1) \text{ dans } [t,t+dt]\right\} = A_k\ k\ s\ d\ t \quad \text{(un départ parmi k possibles)}$$

Pour $k = r$

$$P\left\{[r-1]\to[r] \text{ dans } [t,t+dt]\right\} = A_{r-1}\ a\ d\ t \quad \text{(une arrivée)}$$

$$P\left\{[r]\longrightarrow[r-1] \text{ dans } [t,t+dt]\right\} = A_r\ r\ s\ d\ t \quad \text{(un départ parmi r possibles)}$$

Cherchons les relations qui existent entre les différents A_k

$$P\{[0] \text{ à l'instant } t\} = P\{[0] \text{ à l'instant } t+dt\}$$

$$A_0 = A_0\,(1 - a\,d\,t) + A_1\ s\,d\,t$$

Probabilité qu'il n'y ait pas d'arrivée — Probabilité, s'il y a une arrivée, que le mobile parte dans $[t,t+dt]$

$$A_0\ a = A_1\ s \qquad A_1 = A_0\ \frac{a}{s}$$

$$A_1 = c\ A_0$$

De même :

$$P\{[1] \text{ à l'instant } t\} = P\{[1] \text{ à l'instant } t+dt\}, \text{ ce qui s'écrit:}$$

$$A_1 = A_0\ a\,d\,t + A_1\,(1 - adt - sdt) + A_2\ 2\,s\,dt$$

Probabilité d'une arrivée à l'état $[0]$ — Probablité qu'il n'y ait ni arrivée ni départ à l'état $[1]$ — Probabilité s'il y a une arrivée à l'état $[1]$ qu'il y ait un départ parmi deux départs possibles.

d'où l'on a :

$A_o a - A_1 a - A_1 s + 2 A_2 s = 0$; on a: $A_1 = c A_o$ et $c = \frac{a}{s}$

$A_1 s - A_1 a - A_1 s + 2 A_2 s = 0$ $\qquad A_2 = A_1 \frac{c}{2}$

De façon générale :

$$P\{[k] \text{ à l'instant } t\} = P\{[k] \text{ à l'instant } t + dt\}$$

$$P\{[k] \text{ à l'instant } t+dt\} = P\{[k-1] \to [K] \text{ dans } [t,t+dt]\} + P\{\text{rester à l'état } [K] \text{ dans } [t,t+dt]\} + P\{\text{s'il y a une arrivée quand le système est à l'état } [k] \text{ qu'il y ait un départ.}\}$$

$$A_k = A_{k-1}\, a\, dt + A_k (1 - a dt - k s dt) + A_{k+1} (k+1)\, s\, d\, t$$

D'où la relation de récurrence:

$$A_k (a + ks) = A_{k-1}\, a + A_{k+1} (k+1)\, S \qquad (1)$$

$k = 1$: $A_1 (a+s) = A_o\, a + 2 A_2 s$

On a vu que :

$A_1 = c A_o$

$A_1 (a + s) = A_1 s + 2 A_2 s \qquad A_2 = A_1 \frac{c}{2}$

$k = 2$: $A_2 (a + 2s) = A_1 a + 3 A_3 s$

$A_3 = A_2 \frac{c}{3}$

$k = p$: $A_p (a+ps) = A_{p-1}\, a + A_{p+1} (p+1)s$

$\frac{c}{p} A_{p-1} = A_p$

$A_p (a+ps) = p A_p s + A_{p+1} (p+1) s$

$A_{p+1} = A_p \frac{c}{p+1}$

$k = r$:

$A_r = \frac{c}{r} A_{r-1}$

Lorsque les r postes sont occupés, il continue à arriver des mobiles.
Supposons que les r postes soient occupés:

Le système peut prendre les états $(r+1)\ldots(r+h)$

Soit $k = r+h$ $\quad h$ entier $\geqslant 1$

$$P\left\{[r+h] \quad \text{à l'instant } t\right\} = A_{r+h}$$

$$P\left\{[r+h-1] \rightarrow [r+h]\right\} = A_{r+h-1}\, adt$$

$$P\left\{[r+h] \rightarrow [r+h-1]\right\} = A_{r+h}\, rsdt$$

car il ne peut y avoir que r départs possibles (r postes occupés)

De même que précédemment on aura:

$$A_{r+h} = A_{r+h-1}\, adt + A_{r+h}\,(1 - adt - rsdt) + A_{r+h+1}\, rsdt$$

$$A_{r+h+1}\, a - A_{r+h}\,(a+rs) + A_{r+h+1}\, rs = 0 \qquad (2)$$

$h = 1$ $\quad A_r\, a - A_{r+1}\,(a + rs) + A_{r+2}\, rs = 0 \qquad (3)$

D'autre part, de la relation (1) pour $k = r$, on a:

$$A_r\,(a + rs) = A_{r-1}\, a + A_{r+1}\,(r + 1)\, s$$

Mais il n'y a que r départs possibles, donc on ne peut écrire

$A_{r+1}\,(r+1)\, s$; il faut écrire $A_{r+1}\, rs$

$$A_r\,(a + rs) = A_{r-1}\, a + A_{r+1}\, rs$$

et on a : $A_r = A_{r-1}\,\frac{c}{r}$ d'où :

$$A_r\,(a+ rs) = r\, A_r\, s + A_{r+1}\, rs$$

$$A_{r+1} = A_r\,\frac{c}{r}$$

en portant cette relation dans (3) on a :

$$A_{r+2} = A_{r+1}\,\frac{c}{r}$$

et de façon générale :

$$A_{r+h} = A_{r+h+1}\,\frac{c}{r}$$

Trouvons la valeur des A_k en fonction de A_o

Pour $k \leq r$

$$A_1 = c\, A_o$$

$$A_2 = \frac{c}{2} A_1 = \frac{c^2}{2_3} A_o$$

$$A_3 = \frac{c}{3} A_2 = \frac{c^3}{6} A_o = \frac{c^3}{3!} A_o$$

Supposons vrai pour k et démontrons pour (k+1)

Hypothèse : $A_k = \frac{c^k}{k!} A_o$

On va démontrer que $A_{k+1} = \frac{c^{k+1}}{(k+1)!} A_o$

On a :

$$A_{k+1} = A_k \frac{c}{k+1} = A_o \frac{c^k}{k!} \cdot \frac{c}{(k+1)} \qquad A_{k+1} = \frac{c^{k+1}}{(k+1)!} A_o$$

$$A_r = \frac{c^r}{r!} A_o$$

Pour $k = r + h$ h entier $\geqslant 1$

$$A_{r+h} = A_{r+h-1} \frac{c}{r}$$

$$A_{r+1} = \frac{c}{r} A_r$$

$$A_{r+2} = \frac{c}{r} A_{r+1} = \frac{c^2}{r^2} A_r$$

On démontre par récurrence

$$A_{r+h} = A_r \left(\frac{c}{r}\right)^h$$

et en tenant compte de la valeur de A_r

$$A_{r+h} = A_o \frac{c^r}{r!} \left(\frac{c}{r}\right)^h$$

Nous devons avoir :

$$\sum_{K=0}^{\infty} A_k = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{r-1} A_k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{r+k} = 1$$

$$= A_o \sum_{k=0}^{r-1} \frac{c^k}{k!} + A_r \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^k = 1$$

$$= A_o \sum_{k=0}^{r-1} \frac{c^k}{k!} + A_o \frac{c^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^k = 1$$

On a par hypothèse $\frac{c}{r} < 1$

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^k$ est une progression géométrique de raison $\frac{c}{r}$ < 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{c}{r}} = \frac{r}{r-c}$$

$$A_o \sum_{k=0}^{r-1} \frac{c^k}{k!} + A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c} = 1$$

$$A_o = \frac{1}{\sum_{k=0}^{r-1} \frac{c^k}{k!} + \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c}}$$

Nous pouvons construire le tableau des probabilités de passage des états.

ETATS à l'INSTANT t								
ETATS	(0)	(1)	(2)	..... (r-1)	(r)	(r+1)	(r+2...	(r+k)
Proba. a priori	A_0	A_1	A_2	A_{r-1}	A_r	A_{r+1}	A_{r+2}	A_{r+k}
Etats à l'instant t + dt								
(0) A_0	1-adt	sdt						
(1) A_1	adt	1-adt -sdt	2sdt					
(2) A_2		adt	1-adt -2sdt					
(r-1) A_{r-1}					rsdt			
(r) A_r					1-adt -rsdt	rsdt		
(r+1) A_{r+1}						1-adt -rsdt	rsdt	
(r+2) A_{r+2}						adt	1-adt -rsdt	
(r+k) A_{r+k}								1-adt -rsdt

II - Lois de probabilités de la durée d'attente

Probabilité d'attente nulle = probabilité qu'il y ait moins de r postes occupés

$$P\left\{\text{Attente} = 0\right\} = A_0 + A_1 + \dots + A_{r-1} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} A_{r+k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{r+k} = A_r \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^k = A_r \frac{r}{r-c}$$

$$\text{Probabilité d'attente nulle} = 1 - A_r \frac{r}{r-c}$$

Supposons qu'un mobile trouve en arrivant le système à l'état $\left[r+h\right]$.

En comptant le nouvel arrivant, il y aura $r+j+1-r = h+1$ mobiles en attente.

La prise en charge de ces $(h+1)$ mobiles représente $(h+1)$ évènements séparés par h intervalles de temps. Ces h intervalles de temps sont indépendants par hypothèse. En tenant compte de l'intervalle de survie du mobile qui est servi.

La loi de ces h intervalles sera une loi du type γ_{h+1}

Comme on l'a vu plus haut :

$$f_{h+1}(t)\,dt = e^{-ct}\,\frac{(ct)^h}{h!}\,c\,dt$$

c étant la densité ou fréquence moyenne des évènements, ici la prise en charge des mobiles.

Dans le cas de r postes de service avec une fréquence moyenne de service de s, la fréquence moyenne de prise en charge des mobiles sera rs.

On a donc $c = rs$

$$f_{h+1}(t)\,dt = e^{-rst}\,\frac{(rst)^h}{h!}\,rs\,dt$$

C'est la probabilité pour que l'attente d'un mobile qui trouve le système dans l'état $(r+h)$ soit comprise entre t et t+dt.

Cherchons la loi élémentaire des attentes positives :

$$f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} A_{r+k} \; f_{r+k+1}(t)\,dt$$

A_{r+k} : probabilité d'être à l'état $[r+k]$

$f_{r+k+1}(t)\,dt$: Probabilité pour que l'attente $\in [t, t+dt]$ sachant que le mobile trouve le système dans l'état $[r+k]$

$$= A_r \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^k e^{-rst} \frac{(rst)^k}{k!}\, rs\,dt = A_r\, e^{-rst}\, rs\,dt \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^k \frac{(rst)^k}{k!}$$

$$= A_r\, e^{-rst}\, rs\,dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cst)^k}{k!}$$

$$= A_r\, e^{-rst}\, e^{cst}\, rs\,dt$$

$$f(t)\,dt = A_r\, e^{-(r-c)st}\, rs\,dt$$

C'est la probabilité élémentaire d'attendre un temps $t > 0$.

La fonction de répartition des durées d'attente sera :

$$P\{\text{attente} < t\} = 1 - P\{\text{attente} > t\}$$

$$P\{\text{attente} < t\} = 1 - A_r\, rs \int_t^{+\infty} e^{-(r-c)\,su}\, du$$

$$= 1 - A_r\, rs \left[\frac{-e^{-(r-c)\,su}}{(r-c)\,s}\right]_t^{+\infty}$$

$$= 1 - \frac{rs\,A_r}{(r-c)s}\,(0 + e^{-(r-c)\,st})$$

$$P\{\text{attente} < t\} = 1 - \frac{r - A_r}{r-c}\, e^{-(r-c)\,st}$$

Attente moyenne

$$E\left\{t\right\} = \int_0^\infty t \quad f(t)\, dt$$

$$E\left\{t\right\} = A_r \int_0^\infty t\, e^{-(r-c)\, st}\, rs\, dt$$

Posons $(r-c)\, st = x$

$$t = \frac{x}{(r-c)s}$$

$$dt = \frac{dx}{(r-c)s}$$

$$E\left\{t\right\} = \frac{r\, A_r}{(r-c)^2 s} \int_0^\infty e^{-x}\, x\, dx = \frac{r\, A_r}{(r-c)^2 s}\, \Gamma(2)$$

$$E\left\{t\right\} = \quad T = \frac{r}{(r-c)^2 s}\, A_r$$

a) Temps perdu par le service.

On cherche le cumul des temps perdus par les r postes.

Si le système est à l'état $\lfloor 0 \rfloor$ tous les postes sont libres.

Le temps perdu moyen par un poste $= \frac{1}{s} A_o$

" " " " r " $= \frac{r}{s} A_o$

Temps perdu moyen lorsque (r-1) postes sont libres:

$$\frac{r\, A_o}{s} + \frac{(r-1)}{s} A_1 + \cdots + \frac{k}{s} A_{r-k} + \cdots + \frac{2}{s} A_{r-2} + \frac{A_{r-1}}{s}$$

Lorsque le rième poste est occupé, il n'y a plus de temps perdu.

Prenons $\frac{1}{s}$ comme unité de temps.

Soit $\mathcal{C}_s^{(r)}$ le temps perdu moyen de la station

$$\mathcal{C}_s^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} k\, A_{r-k}$$

On a vu que $A_{r-k} = A_o \frac{c^{r-k}}{(r-k)!}$

$$\text{d'où : } \mathcal{C}_s^{(r)} = A_o \sum_{k=0}^{r} k \frac{c^{r-k}}{(r-k)!}$$

b) Temps perdu par les clients (cumul des temps)

Les clients perdent du temps à partir du moment où ils doivent attendre.

Temps perdu par les clients = temps mis à être servis.

soit $\mathcal{C}_c^{(r)}$ le temps perdu moyen par les clients :

$$\mathcal{C}_c^{(r)} = \frac{A_{r+1}}{s} + \frac{2\,A_{r+2}}{s} + \ldots + \frac{k\,A_{r+k}}{s} + \ldots$$

Prenons $\frac{1}{s}$ comme unité de temps

$$\mathcal{C}_c^{(r)} = \sum_{k=0}^{\infty} k\, A_{r+k}$$

On a vu que $A_{r+k} = A_r \left(\frac{c}{r}\right)^k = A_o \frac{c^r}{r!} \left(\frac{c}{r}\right)^k$

$$\mathcal{C}_c^{(r)} = A_o \frac{c^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{c}{r}\right)^k$$

Posons $\frac{c}{r} = u < 1$

$$\mathcal{C}_c^{(r)} = A_o \frac{c^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} k\, u^k$$

$$= A_o \frac{c^r}{r!} u \sum_{k=1}^{\infty} k\, u^{k-1} = A_o \frac{c^r}{r!} u \frac{d}{du} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u^k \right)$$

Les u^k forment une progression géométrique de raison $u < 1$

$$\mathcal{C}_c^{(r)} = A_o \frac{c^r}{r!} u \frac{d}{du}\left(\frac{1}{1-u}\right)$$

$$\mathcal{C}_c^{(r)} = A_o \frac{c^r}{r!} \frac{u}{(1-u)^2}$$

$$\mathcal{C}_c^{(r)} = A_o \frac{c^r}{r!} \frac{u}{(1-u)^2} = A_o \frac{c^r}{r!} \frac{\frac{c}{r}}{\left(1-\frac{c}{r}\right)^2}$$

$$= A_o \frac{c^r}{(r-c)^2} \frac{c^r}{r!} \qquad \mathcal{C}_c^{(r)} = \frac{c^{r+1}}{(r-1)!\,(r-c)^2} A_o$$

III - Exemple

Passagers se présentant pour l'enregistrement de leurs bagages à des guichets à l'aérodrome.

- Supposons que l'on soit en régime permanent;
- Supposons que pendant une durée T il y ait en moyenne aT passagers se présentant aux guichets
- On peut émettre l'hypothèse que la durée d'enregistrement u suit une loi γ_1 d'expression élémentaire

$$f(u)\,du = e^{-su}\, s\, du$$

En effet, la durée d'enregistrement n'est pas forcément constante. La destination du passager peut nécessiter un déplacement plus grand pour chercher l'étiquette correspondante; le passager peut ne pas présenter son billet de transport tout de suite, donc l'employé devra demander le billet au passager, celui-ci aura à le chercher; les bagages, plus ou moins encombrants à manier, l'excédent à payer en cas de surplus de poids, sont autant de facteurs qui expliqueraient une durée exponentielle du service.

On a ainsi un Processus de Poisson { arrivées de densité a / durée de service exponentielle

- Supposons qu'il y ait 3 postes d'enregistrement
- Les passagers sont servis dans leur ordre d'arrivée, et une fois servis ils sortent du système.

On veut trouver:

1°) L'attente moyenne des passagers,

2°) le temps perdu par le service (cumul des temps perdus par les trois postes)

3°) le temps moyen perdu par les clients (cumul des temps)

4°) probabilité d'attente nulle.

5°) Probabilité que l'attente soit inférieure à t.

La durée moyenne de séjour sera :

$$E\left\{u\right\} = \int_0^\infty u\, e^{-su}\, s\, du = \frac{1}{s}$$

Prenons $\frac{1}{s}$ comme unité de temps.

Reprenant les notations utilisées précédemment on a :

$$c = \frac{a}{s} = a$$

On peut donc dire que l'arrivée des passagers se produit suivant une fréquence moyenne c (car $a = c$)

Le coefficient d'emploi sera :

$\frac{c}{r} = \frac{c}{3}$ Il faut que $\frac{c}{r} < 1$

Supposons $c = 2$

On aura donc $\frac{c}{r} = \frac{2}{3} = 0{,}66$ (coefficient d'emploi)

Attente moyenne T

$$T = \frac{r}{(r-c)^2\, s}\, A_r$$

$$A_r = A_o \frac{c^r}{r!}$$

$$T = \frac{r}{(r-c)^2 s} \quad A_o \frac{c^r}{r!} = A_o \frac{c^r}{(r-1)!(r-c)^2 s}$$

On a pris $\frac{1}{s}$ comme unité de temps

$$T = A_o \frac{c^r}{(r-1)!\ (r-c)}$$

Calculons A_o

$$A_o = \frac{1}{\sum_{n=0}^{r-1} \frac{c^n}{n!} + \frac{c^r}{r!} \cdot \frac{r}{r-c}} =$$

$r = 3$

$$A_o = \frac{1}{1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{6}+\frac{(3)}{3-c}} = \frac{1}{\frac{6-2c+6c-2c^2+3c^2-c^3+c^3}{2-(3c)}}$$

$$A_o = \frac{2(3-c)}{6+4c+c^2}$$

$c = 2$

$$A_o = \frac{1}{9}$$

d'où $$T = \frac{4}{9}$$

Temps perdu par le service $\mathscr{C}_s^{(r)}$

On cherche le cumul de temps perdu par les 3 postes.

Il y aura du temps perdu tant qu'il y a un poste libre.

On a vu que:

$$\mathscr{C}_s^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} k\, A_{r-k} \qquad r = 3$$

$$\mathcal{L}_s^{(3)} = \sum_{k=0}^{3} k\, A_{3-k} = A_o \sum_{k=0}^{3} k\, \frac{c^{3-k}}{(3-k)!}$$

$$= A_o \left(\frac{c^2}{2!} + 2c + 3 \right)$$

On a $A_o = \frac{1}{9}$ $\quad c = 2$

$$\mathcal{L}_a^{(3)} = 1$$

Temps moyen perdu par les clients (cumul des temps) $\quad {}^{(r)}_{c}$

On a $\mathcal{L}_c^{(3)} = \frac{c^4}{2!\,(3-c)^2}\, A_o$

$$\mathcal{L}_c^{(3)} = \frac{8}{9}$$

Probabilité d'attente nulle

$$P\left\{\text{attente} = 0\right\} = P = 1 - A_r \frac{r}{r-c} = 1 - A_3 \frac{3}{3-2}$$

$$P = 1 - 3 A_3$$

$$A_3 = A_o \frac{c^r}{r!} = A_o \frac{2^3}{3!} = \frac{4}{27}$$

$$P = \frac{23}{27}$$

Probabilité que l'attente soit $< t$

$$P\left\{\text{attente} < t\right\} = P_1 = 1 - \frac{r\, A_r}{r-c}\, e^{-(r-c)\, st}$$

$s = 1$; $r = 3$; $c = 2$; supposons $t = 2$

$$P_1 = 1 - \frac{3\, A_3}{3-2}\, e^{-(3-2)2} = 1 - \frac{3x4}{27}\, e^{-2} = 1 - \frac{4}{9}\, e^{-2}$$

$$P_1 = \frac{9\, e^2 - 4}{9\, e^2}$$

RECHERCHE DU NOMBRE OPTIMAL DE POSTES

I - CAS D'UNE INSTALLATION A CREER -

Supposons que l'on veuille créer un centre d'enregistrement de bagages. On se propose de chercher combien de guichets il convient de créer. Pour répondre à cette question, nous prendrons comme situation de référence celle d'une entreprise fictive F possédant un nombre illimité de guichets dont elle n'a pas à payer le personnel, et nous comparerons les bénéfices de l'entreprise réelle E à ceux de F .

- S'il y a un trop grand nombre de postes, les employés ne travailleront qu'un temps relativement court, et le temps qu'ils perdront leur sera néanmoins payé par l'entreprise, ce qui constitue une perte pour celle-ci.

Soit σ le tarif par unité de temps payé à un employé compte-tenu des charges sociales. Pendant Δt , temps perdu, l'entreprise subira une perte de $\sigma \Delta t$. Supposons qu'il y ait m employés par poste, et soit r le nombre de postes. La perte subie par l'entreprise sera alors $r\, m\, \sigma \Delta t$ pour Δt temps perdu.

- S'il y a un nombre insuffisant de postes, ce sont les clients qui perdront du temps à attendre: certains de ces clients s'en iront au bout d'un certain temps, causant une "perte" à l'entreprise. Il faut prendre ici "perte" au sens de manque à gagner. Ce sera par exemple une mauvaise publicité, une réticence à revenir pour être servi par la même entreprise: la "perte" sera donc une diminution de clientèle.

Soit Π la perte causée à l'entreprise par le départ d'un client.

L'optimum sera réalisé en essayant de minimiser la valeur actuelle des pertes futures.

Soit $P(r)$ le coût, dans l'immédiat, de la construction des r postes de service. $P(r)$ est en général donné par un devis des constructeurs, et d'ailleurs assez peu variable avec r.

Soit j le taux d'intérêt continu que nous supposerons constant.

Supposons que l'installation dure un temps infini.

Désignons par $\mathcal{C}_s^{(1)}$ le temps perdu moyen du service. $\mathcal{C}_s^{(2)}$ désigne le cumul des temps perdus par l'ensemble des postes pendant l'unité de temps.

S'il y a m employés par poste, on aura au total m r employés, soit $s(\tau)\,d\tau$ la probabilité de perdre un client qui attend un temps compris entre τ et $\tau + d\tau$.

Soit $f(\ )\,dt$ la probabilité d'attendre un temps compris entre τ et $\tau + d\tau$

La probabilité de perdre un client dans $[t, t+dt]$ sera alors :

$$\Phi(t)\,dt = P\left\{\text{attente} > t\right\} \times P\left\{\text{perdre un client dans } [t, t+dt]\right\}$$

$$\Phi(\tau)\,dt = \left[\int_{\tau}^{\infty} f(t)\,dt\right] s(t)\,dt$$

Soit $M(t)\,dt$ le nombre des clients arrivant dans $[t, t+dt]$

La valeur actuelle des pertes futures s'écrit alors :

$$A(r) = P(r) + mr\,\mathcal{C}_s^{(1)} \int_0^{\infty} e^{-jt}\,dt + \int_0^{\infty} \pi\, M(t) e^{-jt}\,dt \int_{\tau_0}^{\infty} \Phi(t)\,dt$$

τ_0 étant l'instant au delà duquel des clients commenceront à s'en aller.

On aura donc $s(\tau) = 0$ si $\tau \leqslant \tau_0$

Par la suite, nous supposeront $M(t)$ constant et égal à c d'où :

$$A(r) = P(r) + m\, r\sigma \int_0^{\infty} \mathcal{C}_{\sigma}^{(r)}\, e^{-jt}\, dt + \int_0^{\infty} \pi\, c\, e^{-jt}\, dt \int_{\tau_o}^{\infty} \Phi\ (t)\ dt$$

1°/ Supposons que les clients soient décidés à attendre exactement τ_o . Si l'attente est supérieure à τ_o ils s'en vont tous.

Dans ce cas, on aura:

Probabilité de perdre un client = probabilité que l'attente soit supérieure à τ_o

On a vu précédemment que la probabilité élémentaire des attentes est donnée par :

$$f(t)\ dt = A_r\, e^{-(r-c)St}\ rsdt$$

Et en prenant $\frac{1}{S}$ comme unité de temps :

$$f(t)\ dt = A_r\, e^{-(r-c)t}\ rdt$$

donc:

$$P\left\{\text{attente} > \tau_o\right\} = \int_{\tau_o}^{\infty} A_r\, e^{-(r-c)t}\ rdt$$

$$= A_r \frac{r}{r-c}\left[e^{-(r-c)t}\right]_{+\infty}^{\tau_o}$$

$$= A_r \frac{r}{r-c}\ e^{-(r-c)\tau_o}$$

On a vu que $A_r = A_o \frac{c^r}{r!}$

$$P\left\{\text{attente} > \tau_o\right\} = A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c}\, e^{-(r-c)\tau_o}$$

$$P\left\{\text{attente} > t_o\right\} = P\left\{\text{perdre un client}\right\} = A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c} e^{-(r-c)\tau_o}$$

D'autre part on a vu que

$$= A_o \sum_{k=0}^{r} k \frac{c^{r-k}}{(r-k)!}$$

A(r) s'écrit alors :

$$A(r) = P(r) + mr\,\sigma \int_o^{\infty} A_o \sum_{o}^{r} k \frac{c^{r-k}}{(r-k)!} e^{-jt} dt + \Pi c\, A_o \frac{c^r}{r!} e^{-(r-c)\tau_o} \frac{r}{r-c} \int_o^{\infty} e^{-jt} dt$$

$$\int_o^{\infty} e^{-jt}\, dt = \frac{1}{j} \left[-e^{-jt}\right]_o^{\infty} = \frac{1}{j}$$

$$A(r) = P(r) = \frac{mr\,\sigma}{j} A_o \sum_{k=0}^{r} k \frac{c^{r-k}}{(r-k)!} + \frac{\Pi e}{j} A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c} e^{-(r-c)\tau_o}$$

En pratique, il suffira de calculer r pour $r > r_o$ c'est-à-dire de façon à ce qu'il n'y ait pas d'engagement: on prendra la valeur minimum de A(r).

On calcule $A(r_1), A(r_2) \ldots\ldots A(r_P)$ et on prend

$$\text{Min} \quad A(r_i) \qquad i \in [1, P]$$

2°) Supposons maintenant qu'il y ait 2 catégories de clients:

Catégorie A - Les clients de cette catégorie attendent exactement τ_o . Au delà de τ_o ils s'en vont.

Catégorie B - Les clients de cette catégorie attendront plus de τ_o

mais le temps qu'il sont disposés à attendre est aléatoire.

Soit p la probabilité pour un client d'être dans la catégorie A
" q " " " " " " " " " " B

$$p + q = 1$$

Catégorie A -

Dans cette catégorie, on a vu que :

Probabilité de perdre un client = Probabilité attente $> \tau$

$$= A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c} e^{-(r-c)\tau_o}$$

En considérant l'ensemble des clients, la probabilité d'un départ, si l'attente est supérieure à τ_o, aura pour expression :

$$P\, A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c} e^{-(r-c)\tau_o}$$

Catégorie B -

Pour pouvoir effectuer le calcul jusqu'au bout, il nous faut faire une hypothèse complémentaire sur la possibilité de départ en fonction de la durée d'attente. Nous ferons l'hypothèse suivante:

En nous plaçant au-delà de τ_o, les évènements consistant à attendre ou à partir sont indépendants entre eux. Ils ne dépendent que de la durée d'attente.

La possibilité de départ d'un client dans un intervalle de temps petit $\Delta\tau$ est proportionnelle à $\Delta\tau$. Si γ est le coefficient de proportionnalité, la probabilité de départ dans l'intervalle $\Delta\tau$ sera $\gamma\Delta\tau$.

La probabilité qu'il y ait plus d'un départ dans $\Delta\tau$ sera négligeable par rapport à $\Delta\tau$ soit $o(\Delta\tau)$

Dans ces conditions, on a montré que la fonction de répartition des évènements (ici les départs) est donnée par

$$S(t) = 1 - e^{-\gamma t}$$

On doit avoir :

$$S(\tau) \begin{cases} = 0 & \text{si } \tau < \tau_o \\ \to 1 & \text{quant } \tau \to \infty \end{cases}$$

La fonction de répartition des départs s'écrit alors :

$$S(\tau) = 1 - e^{-\gamma(\tau-\tau_o)}$$

d'où $\qquad s(\tau)\,d\tau = e^{-\gamma(\tau-\tau_o)}\,d\tau$

C'est la probabilité de départ d'un client dans $\tau, \tau+d\tau$

Nous avons vu que :

$$\overline{\Phi}(\tau)\,d\tau = \left[\int_o^\infty f(t)\,dt\right] s(\tau)\,d\tau$$

$$f(t)\,dt = A_r\, e^{-(r-c)t}\, r\,dt$$

$$\int_\tau^\infty A_r\, e^{-(r-c)t}\, r\,dt = A_r \frac{r}{r-c}\, e^{-(r-c)\tau}$$

$$= A_c \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c}\, e^{-(r-c)\tau}$$

D'où :

$$\overline{\Phi}(t)\,dt = A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r\gamma}{r-c}\, e^{\gamma\tau_o}\, e^{-(r-c+\gamma)\tau}\, d\tau$$

En considérant l'ensemble des clients des deux catégories, la probabilité pour qu'un client fasse partie de la catégorie B et s'en aille dans $t, t+dt$, avec $t > t_o$ aura pour expression :

$$q \, \Phi(t) \, dt$$

$$\int_{\zeta_o}^{\infty} (\,) \, d = A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c} e^{\gamma t_o} \gamma \int_{\zeta_o}^{\infty} e^{-(r-c+\gamma)t} \, dt$$

$$= A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c} \frac{\gamma}{r-c+\gamma} e^{-(r-c)t_o}$$

D'où la valeur actuelle des pertes futures entre les deux catégories :

$$A(r) = P(r) + \frac{mr\sigma}{j} A_o \sum_{k=0}^{r} k \frac{c^{r-k}}{(r-k)!} + \frac{\pi c}{j} A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c} e^{-(r-c)t_o} \left[P + \frac{q\gamma}{r-c+\gamma} \right]$$

$$A(r) = P(r) + \frac{mr\sigma}{j} A_o \sum_{k=0}^{r} k \frac{c^{r-k}}{(r-k)!} + \frac{\pi c}{j} A_o \frac{c^r}{r!} \frac{r}{r-c} e^{-(r-c)t_o} \left[\frac{p(r-c)+\gamma}{r-c+\gamma} \right]$$

Le minimum est calculé de la même façon que précédemment:

$$\text{Min} \quad A(r_i) \qquad r_i > r_o \qquad i \in [1, P]$$

II - CAS DE REFECTION D'UNE INSTALLATION EXISTANTE -

Dans ce cas on a un certain nombre r de postes déjà en service. On examine s'il serait avantageux d'en créer de nouveaux et quel serait le nombre ρ de postes supplémentaires à créer.

- Soit $P(\rho)$ le coût de l'augmentation du nombre de postes;
- Soit $\tau_s^{(r+\rho)}$ le temps perdu moyen de l'ensemble des postes une fois les nouveaux postes créés.
- Il y aura $m(r+\rho)$ employés, en supposant toujours m employés par poste.
- Π sera la perte occasionnée par le départ d'un client une fois les nouveaux postes en place.
- En posant $r+\rho = R$ la probabilité de perdre un client aura la même expression que précédemment, en remplaçant r par R

1°/ Si l'attente $> t_o$ tous les clients s'en vont.

$$A(R) = P(\rho) + \frac{m R \sigma}{j} A_o \sum_{k=0}^{R} k \frac{c^{R-k}}{(R-k)!} + \frac{\Pi c}{j} A_c \frac{c^R}{R!} \frac{R}{R-c} e^{-(R-c)to}$$

$A(R)$ est la valeur actuelle des pertes futures, une fois les ρ nouveaux postes créés. On cherchera à minimiser $A(R)$.

En notant $R_i = r+i$

On calcule $A(R_i)$, $A(R_2)$ ..... $A(R_p)$

On prendra:

$$\text{Min} \quad A(R_i) \qquad i \in [1, P]$$

2°) 2 catégories de clients :

Catégorie A – Ces clients attendent exactement t_o

Catégorie B – Ces clients attendent plus de t_o et leur départ s'effectue d'une manière aléatoire (loi exponentielle).

La valeur actuelle des pertes futures s'écrit:

$$A(R) = P(\rho) + \frac{m\,r\,c}{j} A_o \sum_{k=0}^{R} \frac{k\, c^{R-k}}{(R-k)!} + \frac{\Pi\,\varepsilon}{j} A_o \frac{c^R}{R!} \frac{R}{R-c} e^{-(R-c)to} \left[\frac{P(R-c)+\delta}{R-c+\delta}\right]$$

Le minimum de A(R) est calculé de la même façon que ci-dessus.

B I B L I O G R A P H I E

M. GIRAULT — Initiation aux processus aléatoires

A. KAUFMANN — Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle.

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Composantes Principales

Vu :
Les Membres du Jury,

Messieurs : EYRAUD
MALECOT
PERON

Vu et approuvé :
Pr. Le Doyen de la Faculté des Sciences,
L'Assesseur,

J. BRACONNIER

Vu et accordé le permis d'imprimer :
Lyon, le 7 Juin 1962

Le Recteur,
Président du Conseil de l'Université ,

P. LOUIS